## Лабораторная работа по теме «Тема 1.9. Методы решения систем линейных уравнений»

### **1.9.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Точные и приближенные методы решения.
2. Понятие решения системы, нормы матрицы.
3. Метод итерации. Алгоритм метода, правило выбора вектора начальных приближений. Условия сходимости метода. Оценка погрешности. Формула для определения числа итераций, гарантирующих достижение заданной точности.
4. Сравнение методов итерации и Зейделя.
5. Метод прогонки решения систем линейных уравнений. Особенности применения метода. Условия сходимости. Алгоритм метода. Прямой ход, обратный ход метода прогонки.
6. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

### **1.9.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 1.9-1, 1.9-2:

* систему уравнений;
* методы решения – значение параметра p.

1. **Провести исследование задания:**

* определить область применения метода;
* проверить условия существования решения;
* проверить условия сходимости;
* в случае необходимости выполнить действия, обеспечивающие сходимость процесса;
* выбрать точку начального приближения;
* сформулировать условия окончания решения.

1. **Составить схему алгоритма и программу** решения системы линейных уравнений выбранным методом и провести контрольное тестирование на примере, рассмотренном в п. 1.9.5.
2. **Получить решение системы уравнений** с точностью и оценить ее погрешность.



1. **Оценить теоретическое количество шагов** для метода итерации, обеспечивающее заданную точность, и сравнить с фактическим.
2. **Решить систему уравнений**из табл. 1.9-2 **методом прогонки«ручным расчетом».**

### **1.9.3. Варианты задания**

Таблица1.9-1. Таблица 1.9-2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **вар.** | **Система уравнений** | **p** | **№**  **вар** | Система уравнений |
| 1 |  | 1 | 1 |  |
| 2 |  | 2 | 2 |  |
| 3 |  | 1 | 3 |  |
| 4 |  | 1 | 4 |  |
| 5 |  | 2 | 5 |  |
| 6 |  | 2 | 6 |  |
| 7 |  | 2 | 7 |  |
| 8 |  | 1 | 8 |  |
| 9 |  | 1 | 9 |  |
| 10 |  | 2 | 10 |  |
| 11 |  | 1 | 11 |  |
| 12 |  | 2 | 12 |  |
| 13 |  | 1 | 13 |  |
| 14 |  | 1 | 14 |  |
| 15 |  | 2 | 15 |  |
| 16 |  | 2 | 16 |  |
| 17 |  | 1 | 17 |  |
| 18 |  | 1 | 18 |  |
| 19 |  | 1 | 19 |  |
| 20 |  | 2 | 20 |  |
| 21 |  | 1 | 21 |  |
| 22 |  | 2 | 22 |  |
| 23 |  | 1 | 23 |  |
| 24 |  | 2 | 24 |  |
| 25 |  | 2 | 25 |  |
| 26 |  | 1 | 26 |  |
| 27 |  | 2 | 27 |  |
| 28 |  | 2 | 28 |  |
| 29 |  | 1 | 29 |  |
| 30 |  | 2 | 30 |  |

В табл. 1.9-2 **p** – метод решения системы линейных уравнений; **p=1** – метод итерации;

**p=2** – метод Зейделя.

**Пример выбора задания из таблицы 1:**

По номеру варианта (например, №3) в столбце **p** выбрать значение параметра **p** (**p=1** – решить систему линейных уравнений методом итерации). Для варианта №5, например, значение параметра **p=2** – решить систему линейных уравнений методом Зейделя.

### **1.9.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты исследование задания.
3. Схемы алгоритмов и программы и результаты контрольного тестирования.
4. Результатырешения СЛУ «расчетом на ПК», представленные в табл. 1.9-3, и погрешность решения.

Таблица 1.9-3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| ... |  |  |  |  |

1. Теоретическая оценкачисла шагов, которое обеспечивает заданную точность.

### 

### **1.9.5. Пример выполнения задания**

1. **Задание для решения СЛУ:**



* методы **итерации** и **Зейделя** с точностью .



1. **Исследование задания**

Из [2] известна рекуррентная формула метода итерации1.9.3-2.

Условие окончания итераций - для всех значений .



Обозначим уравнения исходной системы цифрами





Преобразуем систему так, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы превосходили суммы модулей остальных коэффициентов (не считая свободных членов).









Перепишем систему в виде



, , .



– процесс сходится,



Пусть (- вектор начальных приближений).



1. **Схемы алгоритмов, программы и результаты контрольного тестирования**

Схема алгоритмов метода итерации приведена на рис.1.9.3-1, а метода Зейделя на   
рис. 1.9.4-1 в [2]. По схемам алгоритма студенты составляют программы самостоятельно.

1. **Решение системы ЛУ «расчетом на ПК» и погрешность**

Результаты решения СЛУ методом итерации представим в табл.1.9-3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** |  |  |  |  |
| 0 | 2.15 | -0.83 | 1.16 | 0.44 |
| 1 | 3.3586 | -1.1246 | 1.5093 | -0.4326 |
| 2 | 3.5395 | -1.0204 | 1.5454 | -0.8190 |
| 3 | 3.5831 | -0.9812 | 1.4979 | -0.8532 |
| 4 | 3.5766 | -0.9572 | 1.4914 | -0.8444 |
| 5 | 3.5727 | -0.9565 | 1.4883 | -0.8382 |
| 6 | 3.5714 | -0.9564 | 1.4887 | -0.8364 |
| 7 | 3.5713 | -0.9568 | 1.4888 | -0.8363 |

Результаты решения СЛУ методом Зейделя представим в табл. 1.9-3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** |  |  |  |  |
| 0 | 2.15 | -0.83 | 1.16 | 0.44 |
| 1 | 3.3586 | -0.9663 | 1.6264 | -0.8301 |
| 2 | 3.5935 | -1.0003 | 1.4979 | -0.8491 |
| 3 | 3.5775 | -0.9582 | 1.4880 | -0.8376 |
| 4 | 3.5714 | -0.9565 | 1.4886 | -0.8363 |
| 5 | 3.5713 | -0.9569 | 1.4888 | -0.8363 |

**5**. Т**еоретическая оценка количества шагов**

Определим теоретическое количество шагов для метода итерации при точности из условия , .



, , .



Точность при решении системы методом итерации имеет место уже при k=7**,** т.е. аналитическая оценка является завышенной.



Принимаем



1. **Решение СЛУ уравнений методом прогонки«ручным расчетом»**



Составим таблицу коэффициентов системы уравнений 1.9.5-3 в [2] и проверим выполнение условий существования единственного решения.

Для этого запишем систему уравнений в виде1.9.5-1 в [1]:

Схема алгоритма приведена на рис. 1.9.5-1в [1].

Сведем коэффициенты заданной системы в табл. 1.9-4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** |  |  |  |  |
| 1 | -- | 3.752 | -1.315 | 1.122 |
| 2 | 2.312 | 5.127 | -0.117 | 12.215 |
| 3 | 0.153 | -1.375 | -- | -18.819 |

Условия выполняются для всех уравнений системы, т.е. система имеет единственное решение.



Вычисляем ,



В соответствии с алгоритмом далее необходимо вычислить



Затем



Полагаем



### **1.9.6. Контрольные вопросы по теме Системы линейных уравнений**

1. На какие группы делятся методы решения СЛУ?
2. Какие методы относятся к точным методам?
3. В чем отличие точных методов от приближенных?
4. В чем суть метода Гаусса?
5. Что является решением СЛУ?
6. Что такое норма матрицы?
7. В чем суть метода итераций?
8. Как можно сформулировать условия сходимости метода итераций?
9. В чем суть метода Зейделя?
10. Что общего и в чем различия методов итераций и Зейделя?
11. В чем особенность применения метода прогонки?